1 Найти производные функций:

35. $y=\frac{x}{2}ln\left(x+2\right)^2$ Решение:
Упрощаем используя формулу $\ln A^b=b\ln A \ln(x+2)^2=2\ln(x+2)$.
Тогда: $y'=x'\ln(x+2)+x\ln'((x+2)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$
36. $y=\cos^2\left(\sqrt{tg\frac{x}{2}}\right)$
Положим $A(x)=\sqrt{tg\frac{x}{2}}$.
Используем формулу для сложной функции $\left(\cos^2 A\right)'=2\cos A\sin AA'=A'sin(2A)$. Вычисляем

$$A'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}.\operatorname{tg}'\frac{x}{2}=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}.\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)'==\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}cos^2\frac{x}{2}}.$$

Окончательно: $y'=\frac{\sin\left(2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}cos^2\frac{x}{2}}$
40. $y=\frac{(x^2-7)'\operatorname{tg}x-(x^2-7)\operatorname{tg}'x}{\operatorname{tg}^2x}$ Используем формулу производной частного $y'=\frac{(x^2-7)'\operatorname{tg}x-(x^2-7)\operatorname{tg}'x}{\operatorname{tg}^2x}=\frac{(x^2-7)'\operatorname{tg}x-(x^2-7)\operatorname{tg}'x}{\operatorname{tg}^2x}$
Упрошчаем числителя:

$$(x^2-7)'\operatorname{tg}x-(x^2-7)\operatorname{tg}'x=2x\operatorname{tg}x-\frac{x^2-7}{\cos^2x}=\frac{2x\sin x\cos x-(x^2-7)=x\sin 2x-x^2+7}{\cos^2x}$$

Получаем окончательно:

$$y'=\frac{2x\sin x\cos x-(x^2-7)=x\sin 2x-x^2+7}{\sin^2x}.$$

2 Найти частные производные функций по каждой из переменной:

143. $z=\frac{\ln x}{y}+2\sqrt{xy}+y\operatorname{tg}x$

$$z'_x=\frac{1}{xy}+2\frac{1}{2\sqrt{xy}}y+\frac{y}{\cos^2x}=\frac{1}{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$z'_y=-\frac{\ln x}{y^2}+2\frac{1}{2\sqrt{xy}}x+\operatorname{tg}x=-\frac{\ln x}{y^2}+\sqrt{\frac{x}{y}}+\operatorname{tg}x.$$

144. $z=\sin^2\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}}-\ln\sqrt{\frac{x}{y}}$
Обозначаем $A:=\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}}$ и упрощаем: $A=\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}}=\sqrt{\sqrt{x}y}=\left(x^{1/2}y\right)^{1/2}=x^{1/4}y^{1/2}$.

$$A'_x=\frac{1}{4}x^{-3/4}y^{1/2}.$$

$$A'_y=\frac{1}{2}x^{1/4}y^{-1/2}.$$

Упрошчаем $B:=\ln\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln x-\ln y\right)$. Тогда

$$B'_x=\frac{1}{2x},$$

$$B'_y=-\frac{1}{2y}.$$

$$z'_x=\left(\sin^2A-B\right)'_x=2\sin A\cos A.A'_x-B'_x=A'_x.\sin 2A-B'_x=\frac{1}{4}x^{-3/4}y^{1/2}\sin\left(x^{1/4}y^{1/2}\right)-\frac{1}{2x},$$

$$z'_y=\left(\sin^2A-B\right)'_y=2\sin A\cos A.A'_y-B'_y=A'_y.\sin 2A-B'_y=\frac{1}{2}x^{1/4}y^{-1/2}\sin\left(x^{1/4}y^{1/2}\right)+\frac{1}{2y},$$

148. $y=\sin^2\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}$
Обозначаем $A(x,z):=\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}$.

$$y'_x=2\sin A\cos A.A'_x=A'_x\sin 2A$$

Подобно $y'_z = A'_z \sin 2A$
Вычисляем

$$A'_x = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}}\left(\frac{x-2}{z+1}\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}(z+1)} = \frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}$$

Аналогично:

$$A'_z = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}}\left(\frac{x-2}{z+1}\right)'_z = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}}\left(-\frac{x-2}{(z+1)^2}\right) = \frac{1}{2}(x-2)^{1/2}(z+1)^{-3/2}.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{1}{2}A'_x.\sin 2A = \frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}.\sin\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}$$

и

$$y'_z = \frac{1}{2}A'_z.\sin 2A = \frac{1}{2}(x-2)^{1/2}(z+1)^{-3/2}.\sin\sqrt{\frac{x-2}{z+1}}.$$

3 Найти дифференциал первого и второго порядков:

$$df = f'dx \quad ; \quad d^2f = f''dx^2$$

202. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}$

$$f(x) = f'(x) = \frac{2x}{2} + \frac{4}{x^3} = x + \frac{4}{x^3} \Rightarrow df = \left(x + \frac{4}{x^3}\right)dx$$

$$f''(x) = 1 - \frac{12}{x^4} \Rightarrow d^2f = \left(1 - \frac{12}{x^4}\right)dx^2$$

203. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{3x}$

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow df = \left(x + \frac{4}{x^3}\right)dx$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(2 - 0 + 2\frac{1}{x^3}\right) \Rightarrow d^2f = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)dx^2$$

4 Найти полные дифференциалы функций:

5 Интегральное исчисление

5.1 Неопределеннный интеграл

311. $\int \frac{4x}{4+x^4}dx$

$\int \frac{\overbrace{4}^{\leftarrow}\overbrace{x}^{\rightarrow}}{4+x^4}dx = \frac{4}{2}\int\frac{dx^2}{2^2+(x^2)^2} = 2\frac{1}{2}arctg\frac{x^2}{2} = arctg\frac{x^2}{2} + C$

312. $\int \frac{3x}{3-2x^2}dx$

$\int \frac{\overbrace{3}^{\leftarrow}\overbrace{x}^{\rightarrow}}{3-2x^2}dx = \frac{3}{2(-2)}\int\frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} = -\frac{3}{4}\ln(3-2x^2) + C$

420. $I = \int\limits_0^\pi (x-3)cos\frac{x}{2}dx$

$$I = 2\int\limits_0^\pi (x-3)dsin\frac{x}{2} = 2(x-3)sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi - 2\int\limits_0^\pi sin\frac{x}{2}dx$$

$$I = 2(\pi-3)\underbrace{sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 2(0-3)\underbrace{sin\frac{0}{2}}_{0} + 4sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi$$

$$I = 2\pi - 6 + 4 = 2\pi - 2$$

421. Думаю что в задание есть ошибка. Поменяем знак под радикала на $+$: $I = \int\limits_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}dx$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 x^2\sqrt{x^2+9}dx^2$$

Полагаем $t := x^2$. Поменяем границы интегрирование: $t_1 = 0^2 = 0$; $t_2 = 4^2 = 16$.

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{16} t\sqrt{t+9}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{16} (t+9-9)\sqrt{t+9}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{16} (t+9)^{3/2} - 9(t+9)^{1/2}dt$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}(t+9)^{5/2}\Big|_0^{16} - 9\frac{2}{3}(t+9)^{3/2}\Big|_0^{16}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}(5^5-3^5) - 9\frac{2}{3}(5^3-3^3)\right)$$

$$(5^4-3^4) - 3(5^3-3^3) = 250$$

6 Решить дифференциальные уравнения:

520. $y'' + \frac{1}{\sin^2 x} = 0$.
$y' = -\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = cotgx + C_1$.
$y = \int (cotgx` + C_1)dx = \int cotgxdx + C_1x + C_2$.
$\int cotgxdx = \int \overbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}^{\to} dx = \int d\sin x \sin x = \ln|\sin x|$.
Тогда $y = \ln|\sin x| + C_1x + C_2$.
521. $\ln\cos ydx + x\,\mathrm{tg}\,ydy = 0$.
Отделим переменных и проинтегрируем: $\frac{dx}{x}dx + \frac{\sin y}{\cos y.\ln\cos y}dy = 0 \Rightarrow \int\frac{dx}{x}dx + \int\frac{\sin y}{\cos y.\ln\cos y}dy = C \Leftrightarrow$ $\ln x + \ln(\ln(\ln\cos y)) = C \Leftrightarrow x.\ln(\ln\cos y) = C$.

7 Вероятность:

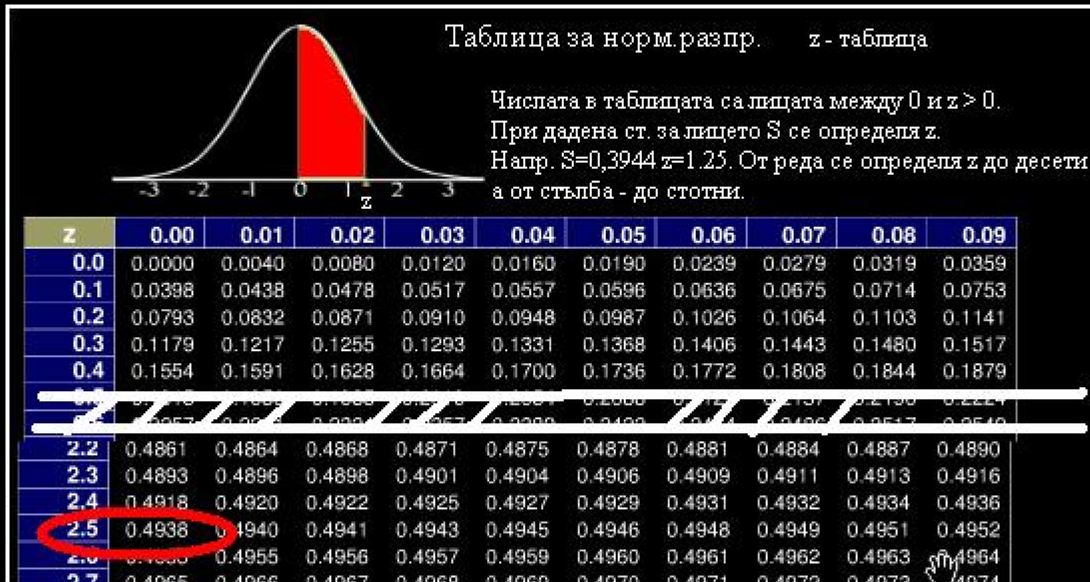
615. Вероятность появления события в каждом из независимых испитаний равна 0,08. Найти вероятность того, что событие натупит хотя бы один раз в 100 испытаниях.
Решение: Событие успеха имеет вероятность $p = 0,08$. Тогда противоположная вероятность ровна $q = 1-p = 0,92$. Обозначаем A событие что успех наступил хоть раз. Вычисляем вероятность противоположного A событию - что успех не наступил ни разу: $P(\overline{A}) = q^{100}$. Тогда $P(A) = 1 - \overline{A} = 1 - q^{100}$. Вычисляем $\overline{A} = q^{100}$ изпользуя логарифмов: $\ln(\overline{A}) = \ln(q^{100}) = 100\ln q = 100.(-0,0834) = -8,34$.
$P(\overline{A}) = e^{-8,34} = 2,39211.10^{-4} = 0,000239$
$P(A) = 1 - 0,000239 = 0,999761$

618.Вероятность появления события в каждом из независимых испитаний равна 0,2. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие натупит не менее 20 и не более 30 раз.
Решение: $p = 0,2$ $q = 1-p = 0,8$. Вычисляем оценки мат ожидание $\overline{x} = np = 100.0,2 = 20$ и стандартного отклонения ($\overline{\sigma} = \sqrt{npq} = \sqrt{100.0,2.0,8} = 4$.
Формула нормировки к стандартному нормальному расспределению есть $\tilde{a} = \frac{a-\overline{\mu}}{\overline{\sigma}}$.
Для чисел 20 и 30 получаем $\tilde{20} = \frac{20-20}{4} = 0$, $\tilde{30} = \frac{30-20}{4} = 2,5$.
Надо заглянуть в z-таблице стандартного нормального расспределеня $z(2,5) - z(0) = 0,4938 - 0 = 0,4938$.

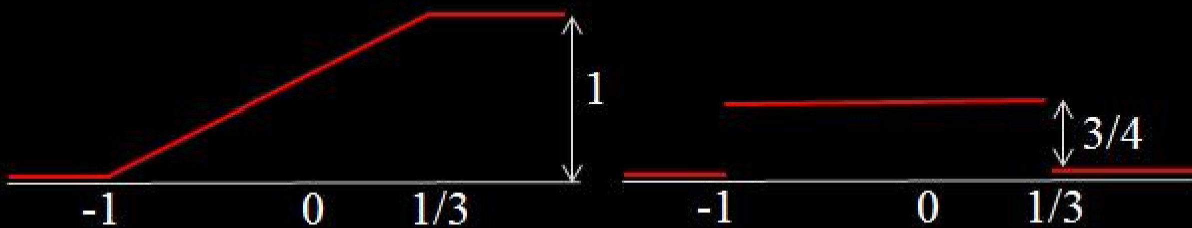
8 Случайные величины

705. $F(X) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1 & x > \frac{1}{3} \end{cases}$

Величина примет значение в интервале $(0; 1/3)$ свероятностю $F(1/3) - F(0) = 1 - 3/4 = 1/4$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
[illegible]	[illegible]	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964



706. Функция плотности распределения непрерывной случайной величины X равна $f(x) = csin2x$ в интервале $(0; \pi/2)$, вне этого интервала $f(x) = 0$ Найти постоянный параметр c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c. \int_{0}^{\pi/2} sin(2x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{c}{2}(cos\pi - cos0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

9 Статистическая обработка резултатов измерений

$$N = \sum n_i.$$

$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N}$.

$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X}) n_i}{N-1}}$.

$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$.

10 Статистическая проверка гипотез

Нормально распределенные величины (малые выборки). В условиях задачи имеем две нормально распределенные малые выборки $n_1 \leq 30, n_2 \leq 30$, выборочные средние не равны: $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, исправленные выборочные дисперсии выборок также не равны: $S_1^2 \neq S_2^2$.
Надо ответить на вопрос: " значимое ли расхождение генеральных средних - μ_1 и μ_2?".
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, при альтернативной гипотезе $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.
Если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, тогда t-статистика вычисляется по формуле:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

Число степеней свободы k находят вычисляют по формуле:

$$k = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\left(S_1^2/n_1\right)^2 / (n_1 - 1) + \left(S_2^2/n_2\right)^2 / (n_2 - 1)} - 2$$

Найденное число k надо округлить до целого числа. По таблице находят критическое значение $t_{\alpha/2\ ;\ k}\quad k$.
Если $t \geq t_{\alpha/2\ ;\ k}$ - нулевая гипотеза отвергается и $\mu_1 \neq \mu_2$.
Если $t < t_{\alpha/2\ ;\ k}$ - нет оснований отвергнуть нулевой гипотезы $\mu_1 \neq \mu_2$.

11 Корреляционный анализ

Он определяет статистическую зависимость между двух случайных величин. Сначала опредуляем корреляционный коефициент по формуле: $r = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}}$

Через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ обозначены средные двух величин.
r надо принадлежит в интервале $[-1; +1]$. Если провяряем хипотезу о независимости величин мы използуем t - статистику по формуле $t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ которая имеет t -разпределение с $N - 2$ степены свободы. Когда $|t| > t_{\alpha/2\ ,\ n-2}$ нулевая гипотеза отвергается. Доверительный интервал для r есть $\left[r - \frac{1{,}96(1-r^2)}{\sqrt{n}}\ ;\ r + \frac{1{,}96(1-r^2)}{\sqrt{n}}\right]$
Описанный критерий применяется когда известно что у генеральной совкупности нет зависимости у двух величин и мы хотим установить ее наличии у выборке.
Если хотим найти доверителЬный интервал для коефициента корреляции совершаем Z - трансформацию по формулу $Z = \frac{1}{2} ln \frac{1+r}{1-r}$

чтобы перйти к нормальнму разпределению со средней Z и стандартное отклонение $\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$ где N - число наблюдений.
При заданый уровен значимости α определяем ее z_α- стойност по таблице. Например для $\alpha = 0,05$ она ровна $z_\alpha = 1,96$. Определяем доверительный интервал для $Z : Z \in (Z - z_\alpha\sigma_Z\ ;\ Z + z_\alpha\sigma_Z)$. Потом надо совершит обратное преоразование по формуле $r = \frac{e^{2Z}-1}{e^{2Z}+1}$ чтобы определить доверителного интервала для ..

12 Корреляционный и регрессионный анализ

$$\left|\begin{array}{l} \beta_0 n + \beta_1 \sum x_i = \sum y_i \\ \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{array}\right.$$

Дисперсия фактора X обозначается через σ_x^2: $\sigma_x^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{X}\right)}{N-1}$.
Общая дисперсия результативного признака $\sigma_y^2 = \frac{\sum\left(y_i - \bar{Y}\right)}{N-1}$ отображающая общее влияние всех факторов.
Остаточная дисперсия: $\sigma_\xi^2 = \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)}{N-2}$.
Факторная дисперсия $\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum\left(\hat{y}_i - \bar{Y}\right)}{1}$.
Для оценки типичности параметров уравнения регрессии используется t – критерий Стьюдента.
При этом вычисляются значения t- критерия: для параметра β_0: $t_{\beta_0} = \frac{\beta_0\sqrt{N-2}}{\sigma_\xi}$.
и для параметра β_1: $t_{\beta_1} = \frac{\beta_1\sqrt{N-2}\sigma_x}{\sigma_\xi}$.
Полученные по формулам статистики сравниваются с критическим , который получают по таблице Стьюдента с учетом принятого уровня значимости числа степеней свободы .

Полученные при анализе корреляционной связи параметры уравнения регрессии признаются типичными, если t фактическое больше t критического:

$$t_k < t_{\beta_0}\ , t_{\beta_1}$$

Соотношение между факторной и общей дисперсиями характеризует меру *тесноты связи* между признаками x и y:

$$\frac{\sigma^2_{\hat{y}}}{\sigma^2_y} = R^2$$

Показатель R^2 называется индексом детерминации (причинности).
Он выражает долю факторной дисперсии, т.е. характеризует, какая часть общей вариации результативного признака y объясняется изменением факторного признака x.

На основе етой формулы определяется выборочный *индекс корреляции* R Пирсона: $\hat{R} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\hat{y}}}{\sigma^2_y}}$.

Нулевая гипотеза H_0 заключается в отсутствии линейной корреляционной связи между исследуемыми переменными в генеральной совокупности: $H_0\ :\ \rho = 0$.
Альтернативной гипотезой $H_0\ :\ \rho = 0$ является $H_1\ :\ \rho \neq 0$.
Проверка нулевой гипотезы осуществляется в зависимости от объема выборки.

1. Большой объем выборки $N \geq 100$.

Проверка нулевой гипотезы осуществлямой с критерия *Стьюдента* заключается в вычислении величины $t_0 = \frac{\hat{R}\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-\hat{R}^2}}$ которая сравнивается с критическими значениями $t_{\alpha/2\ ;\ N-2}$ для выбранного уровня значимости α степеней свободы $N-2$.

Если значение t попадает в область допустимых значений нулевая гипотеза H_0 не отвергается.
Считается, что в этом случае линейная связь между рассматриваемыми переменными отсутствует.
Выборочный коэффициент линейной корреляции $\hat{R}$ Пирсона значимо отличается от нуля, если эмпирическое значение t попадает в критическую область критерия.
Для значимого коэффициента корреляции рассчитывается доверительный интервал, который с вероятностью $P = 1 - \alpha$ содержит неизвестный генеральный коэффициент корреляции ρ.
Границы доверительного интервала находятся по формуле $\rho \in \left(\hat{R} - t_{\alpha/2\ ;\ N-2}\frac{1-\hat{R}^2}{\sqrt{N-1}}\ ,\ \hat{R} + t_{\alpha/2\ ;\ N-2}\frac{1-\hat{R}^2}{\sqrt{N-1}}\right)$

2. Ограниченный объем выборки $N < 100$.

Для проверки гипотезы об отсутствии корреляции между исследуемыми величинами используется преобразование Фишера. Впервые надо вычислить скорректированный коэффициент по формуле: $\hat{R}' = \hat{R}\left(1 + \frac{1-\hat{R}^2}{2(N-3)}\right)$.
Проверка нулевой гипотезы заключается в вычислении значения $Z = \frac{1}{2}ln\frac{1-\hat{R}'^2}{1+\hat{R}'^2}$.
Ето преобразование называется *z - преобразование Фишера* и сопоставления его с критическим $z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ где $z_{1-\alpha/2}$ – квантили нормированного распределения.
Если эмпирическое значение u попадает в область допустимых значений нулевая гипотеза не отвергается.
Считается, что линейной корреляционной связи между рассматриваемыми величинами нет.

Корреляция считается значимой, если эмпирическое значение u попадает в критическую область.
Границы доверительного интервала для генерального коэффициента корреляции при ограниченном объеме выборки определяются через переменение обратного z - преобразования: $R = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$.

Позвоните пожалуйста.